B P

(Bre)

Théorème de Riesz - Fischer

L 201
L 205
L 208
L 234
L 241

Lemme : Caractérisation des espaces de Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-ev normé.

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach $\Leftrightarrow$ Tte série CVA est CV

Démonstration : $\Rightarrow$ Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Mq (S_n) converge.

Par inégalité triangulaire, on a $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\|S_{n+p} - S_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$

Or la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$ converge car c'est une série CVA

donc cette suite est de Cauchy. Par suite, (S_n) est de Cauchy.

Ainsi, (S_n) est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$ complet, donc elle converge

D'où $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

$\Leftarrow$ Soit (x_n) une suite de Cauchy de E.

Montrons que (x_n) admet une valeur d'adhérence.

Grâce à la propriété de Cauchy de la suite (x_n), on peut construire de proche en proche une extractrice avec : $\varphi(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \min\{k > \varphi(n-1) : \forall \ell \in \mathbb{N}, \|x_{k+\ell} - x_k\| < \frac{1}{2^n}\}$

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{2^n}$

On pose alors $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)}$.

De sorte que $x_{\varphi(n)} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a $\forall k \geqslant 2$, $\|u_k\| < \frac{2}{2^k}$ ainsi $\sum_{k \geqslant 0} \|u_k\|$ CV

ainsi par hypothèse $(x_{\varphi(n)})$ converge dans E.

(x_n) est une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence : elle converge.

Lemme : Inégalité de Minkowski généralisée

Soient $(f_n) \in \mathcal{M}(X, [0;+\infty])^{\mathbb{N}}$, alors $\forall p \in [1;+\infty[$, on a $\|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$

Démonstration : D'après l'inégalité de Minkowski, ou de façon triviale,

$\forall f, g \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$, $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ dans $[0;\infty]$.

Ainsi, par récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\sum_{k=0}^{n} f_k\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p$

Or, comme les f_n sont positives, on a $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)^p$ tend en croissant vers $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^p$

Ainsi d'après le théorème de convergence monotone :

$$\lim_{n\to+\infty} \int \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)^p = \int \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)^p = \int \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^p$$

d'où $\|\sum_{k=0}^{n} f_k\|_p \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p$ donne à la limite : $\|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\|_p \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p$

Théorème de Riesz-Fischer : Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.
alors $\forall p \in [1, \infty]$, $(\mathbb{L}^p((X, \mathcal{T}, \mu), \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Démonstration : **Cas $p \in [1; +\infty[$.** Utilisons le critère du lemme 1.

Soit $\sum f_n$ une série absolument convergente dans $(\mathbb{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$

D'après Minkowski généralisé, $\|\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty$

d'où $\int_X |\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)||^p \, d\mu < \infty$.

Ainsi, pour μ-presque tout $x \in X$, la série $\sum |f_n(x)|$ est convergente.

Le corps $\mathbb{K}$ étant complet, la série de terme général $\sum f_n(x)$ converge.

On pose alors
$$F(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) & \text{sur } \{x \in X : \sum |f_n(x)| < \infty\} \\ 0 & \text{sur } {}^c\{x \in X : \sum |f_n(x)| < \infty\} \end{cases}$$

Or, μ-pp, $|F - \sum_{k=0}^{m} f_k| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k|$ puis $\sum f_k \xrightarrow{pp} F$

donc, toujours par Minkowski, $\|F - \sum_{k=0}^{m} f_k\|_p \leq \|\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k|\|_p \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|f_k\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

d'où $\sum_{k=0}^{m} f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_p} F$ donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ est bien convergente dans $\mathbb{L}^p(\mu)$.

Cas $p = +\infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathbb{L}^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$

On pose $A_\infty = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\}\right) \cup \left(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}\right)$

On a : $\mu(A_\infty) = 0$ comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

On définit alors les fonctions bornées : $g_n = f_n \cdot \mathbb{1}_{{}^cA_\infty}$.

On a $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $|g_n - g_m| = |f_n - f_m| \mathbb{1}_{{}^cA_\infty} \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

d'où $\|g_n - g_m\|_{sup} \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ et alors (g_n) est une suite de Cauchy

de $(B(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{sup})$, or cet espace est complet donc $\exists g \in B(X, \mathbb{K})$ tq $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{sup}} g$.

En particulier, $g_n \xrightarrow{CVS} g$, d'où g mesurable comme limite simple.

d'où $g \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$.

Enfin,
$$\begin{aligned} \|f_n - g\|_\infty &\leq \|f_n - g_n\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \\ &= \|(f_n - g_n)\mathbb{1}_{A_\infty}\|_\infty + \|g_n - g\|_{sup} \\ &= \|g_n - g\|_{sup} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

d'où $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ donc la suite de Cauchy (f_n) converge.